О количественных оценках языков и аксиоматик обобщенных теорий[1]

Шиян Т.А. О количественных оценках языков и аксиоматик обобщенных теорий // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке: Материалы X Общероссийской научной конференции. 26-28 июня 2008. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2008. С. 323-325.
Сохранено с сайта: http://taras-shiyan.narod.ru.
E-mail: taras_a_shiyan@mail.ru.

1. *Обобщенными теориями* Э. Мендельсон в [4, гл. 2, §12] называет теории, в языке которых снимается ограничение на мощность входящих в их алфавиты классов символов. Т.е., классы индивидных, предикатных, функциональных и т.д. символов могут быть более, чем счетными. *Языки* таких теорий также будем называть *обобщенными*.

Количественный анализ обобщенных языков и теорий ставит ряд элементарных вопросов.

1. Какова мощность алфавита, если известно число классов символов и мощность каждого из этих классов?
2. Какова при тех же условиях мощность различных классов термов и формул?
3. Сколько аксиоматизаций той или иной мощности возможно для некоторой обобщенной теории, если известна мощность ее языка (класса формул)?

Вопросы эти ставятся в общем виде: каковы формулы, позволяющие вычислить ту или иную интересующую нас количественную оценку, или каковы (максимально узкие) диапазоны, в которых колеблются соответствующие оценки?

Поиск решения этих задач, в конечном счете, упирается в различные вопросы арифметики бесконечных кардиналов. А решение этих вопросов зависит от принимаемой теории множеств, в рамках которой проводится рассуждение. Теория Цермелло-Френкеля *ZF* слишком слаба для анализа бесконечных кардиналов, поскольку уже такое простое утверждение, как «Любое бесконечное множество M равномощно своему декартовому квадрату M^2» настолько сильно, что в *ZF* доказуема его дедуктивная эквивалентность таким мощным утверждениям как аксиома выбора (*AC*), принцип Цермело, принцип Цорна и др. [2, 100-101]. Таким образом, базовой теорией для решения поставленных задач будет *ZFC* – теория *ZF* + *AC* (или любой ее дедуктивный аналог). Для большинства наших рассуждений достаточно элементарных принципов, приведенных в [1] и лишь в некоторых подслучаях требуется более сильный аппарат, изложенный в [3].

2. Решение первого вопроса связано со сложением бесконечных кардиналов и носит элементарный характер. Если алфавит теории состоит из n групп знаков (n – произвольный конечный или бесконечный кардинал) и бесконечный кардинал $\aleph_\alpha$ – наибольшая из мощностей этих групп, то

1) если $n \leq \aleph_\alpha$, то мощность алфавита – $\aleph_\alpha$;
2) если же $n > \aleph_\alpha$, то мощность алфавита – n.

3. Группа вопросов о мощности того или иного класса термов или формул в языке с алфавитом мощностью m решается следующим образом. Пусть

- m_1 ($m_1 \leq m$) – мощность множества символов, задействованных в построении некоторого класса термов T,

- m_2 ($m_2 \leq m$) – мощность множества символов, задействованных в построении некоторого класса формул F,
- в данных классах допускаются термы длины n_1 и формулы длины n_2,

тогда число термов k_1 и число формул k_2 таковы, что: $k_1 \in [m_1, m_1^{n_1}]$, $k_2 \in [m_2, m_2^{n_2}]$.

Если класс термов T совпадает с классом термов, фигурирующих в классе формул F, то также имеет место: $m_1 \leq m_2$, $n_1 \leq n_2$, $m_1^{n_1} \leq m_2^{n_2}$, $k_1 \leq k_2$.

Если класс формул F есть класс всех правильно построенных формул данного языка, то $m_2 = m$.

Если n_1 и n_2 конечны (что предполагается понятием обобщенной теории по Мендельсону), а m_1 и m_2 бесконечны, то $m_1^{n_1} = m_1$, $m_2^{n_2} = m_2$ и, следовательно, $k_1 = m_1$ и $k_2 = m_2$.

4. Пусть задан формальный язык L, содержащий $\aleph_\alpha$ формул, и задано множество операций Ω над формулами этого языка (правил вывода). Тогда каждое множество формул A этого языка задает аксиоматизацию некоторой формальной теории. Вопрос, сколько аксиоматизаций различной мощности возможно в данном языке? Или иначе, сколько исчислений типа $\langle L, A, \Omega \rangle$ существует: при конечных A, при A мощности $\aleph_0$, $\aleph_1$, …, $\aleph_\alpha$? Конечно, при стандартной формализации (что подразумевается понятием обобщенной теории по Мендельсону) увеличение числа дескриптивных переменных или параметров не влияет на число принципиально различных аксиоматик (т.е. без учета графических вариантов). Но, в принципе, могут быть и другие причины несчетности языка. Поэтому, задача сформулирована так, что мы отвлекаемся от каких-либо знаний о структуре алфавита и от способов формализации теорий, кроме требования конечности формул языка. Теперь вопрос сводится к вычислению для множества L числа подмножеств той или иной мощности n, что определяется формулой $\aleph_\alpha^{\,n}$. Отсюда, получаем следующие решения:

- всего подмножеств (и, следовательно, исчислений указанного вида) – $2^{\aleph_\alpha}$;
- конечных подмножеств – $\aleph_\alpha$, причем число подмножеств каждой конечной мощности – также $\aleph_\alpha$;
- подмножеств мощностью $\aleph_\alpha$ – $2^{\aleph_\alpha}$;
- число $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ разных подмножеств мощностью $\aleph_\beta$ ($0 \leq \beta < \alpha$) таково, что $2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq 2^{\aleph_\alpha}$ и $\aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$. Получаем три подслучая:
  1) если $\aleph_\alpha < 2^{\aleph_\beta}$, то $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$;
  2) если $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_\beta}$, то $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$;
  3) если $\aleph_\alpha > 2^{\aleph_\beta}$, то $2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq 2^{\aleph_\alpha}$. Из подслучая 2) следует, что если $\aleph_\alpha > 2^{\aleph_\beta}$, то $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha$. Объединяя оба следования, получаем, что если $\aleph_\alpha > 2^{\aleph_\beta}$, то $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$.

Обобщая приведенный анализ, получаем:

- если $2^n \leq \aleph_\alpha$, то множество всех подмножеств мощностью n имеет мощность $\aleph_\alpha$,
- если $\aleph_\alpha < 2^n$, то множество всех подмножеств мощностью n имеет мощность 2^n.

Для теории ZFC положение кардинала $2^{\aleph_\beta}$ в ряду $\aleph_{\beta+1}$, $\aleph_{\beta+2}$, … не определено. Некоторые решения можно найти в рамках тех или иных расширений ZFC, например, присоединив к ZFC обобщенную континуум-гипотезу (GCH): $\forall\alpha(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$. Совместимость ZF, AC и GCH показана Геделем [3, 39-40]. Рассмотрим снова значения кардиналов вида $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ при $\aleph_\beta < \aleph_\alpha$.

- Подслучай 1) становится невозможным, поскольку получается, что $\aleph_{\beta+1} \leq \aleph_\alpha > \aleph_{\beta+1}$.
- Подслучай 2) подразумевает уже, что $\aleph_\alpha$ – непредельный кардинал (т.е., что существует такой ординал γ, что $\gamma < \alpha$ и $\gamma + 1 = \alpha$).

- Подслучай 3) охватывает все остальные возможные ситуации.

Таким образом, при наличии аксиомы *GCH*, получаем, что в множестве мощностью $\aleph_\alpha$ существует в точности $\aleph_\alpha$ различных подмножеств мощностью *n*, если $n<\aleph_\alpha$, и $\aleph_{\alpha+1}$ подмножеств мощностью $\aleph_\alpha$.

Литература

1. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 1977.
2. *Ершов Ю.Л.*, *Палютин Е.А.* Математическая логика. М., 1979.
3. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М., 1973.
4. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М., 1971, 1984 и др.